

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS



SOLUCIÓN Y RÚBRICA

Tercera Evaluación de ECUACIONES DIFERENCIALES
13 de Septiembre de 2013

1. (15 puntos) Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$dy = sen(x+y)dx$$

SOLUCIÓN:

$$\frac{dy}{dx} = sen(x+y)$$

Si $u = x+y \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{du}{dx} - 1 = sen(u)}$

$$\int \frac{du}{1+sen(u)} du = \int dx$$

$$\int \frac{du}{1+sen(u)} \cdot \frac{1-sen(u)}{1-sen(u)} du = x + c$$

$$\int \frac{1-sen(u)}{cos^2(u)} du = x + c$$

$$\int sec^2(u)du - \int \frac{sen(u)}{cos^2(u)} du = x + c$$

$$tan(u) - \frac{1}{cos(u)} = x + c$$

$$\boxed{tan(x+y) - sec(x+y) = x + c}$$

Reconoce que ecuación del tipo $y' = f(x+y)$, aplica el cambio de variable y obtiene una ecuación en términos del seno de la nueva variable	Hasta 4
Resuelve la ecuación con la nueva variable usando el artificio correspondiente de multiplicar por la conjugada y obtiene una nueva ecuación con las funciones cos^2 y sen^2	Hasta 5
Resuelve la nueva ecuación para la nueva variable	Hasta 4
Expresa la solución en términos de las variables originales	Hasta 2

2. (15 puntos) Utilice la transformación $z = sen(x)$ para resolver:

$$y'' + tan(x)y' + cos^2(x)y = 0$$

SOLUCIÓN:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}cos(x)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx} \Rightarrow \left(\frac{d^2y}{dz^2}cos(x) - \frac{dy}{dz}sen(x)\frac{dx}{dz}\right)cos(x) \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = y''cos^2x - y'z}$$

de $y'' + tan(x)y' + cos^2(x)y = 0$ se tiene:

$$y''\cancel{(1-z^2)} - \cancel{y'}z + \cancel{zy'} + \cancel{(1-z^2)}y = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y'' + y = 0}$$

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$$

$$\Rightarrow y(z) = C_1cos(z) + C_2sen(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = C_1cos(sen(x)) + C_2sen(sen(x))}$$

Aplica correctamente la regla de la cadena y halla la primera y segunda derivada en términos de la variable z.	Hasta 6
Reemplaza las derivadas obtenida en la ecuación diferencial y la reconoce como una ecuación de coeficientes $cos^2(x)$ y la transforma en una ecuación de coef. constantes con variable independiente z.	Hasta 3
Resuelve la ecuación de coeficientes constantes con variable independiente z.	Hasta 4
Expresa la solución en términos de la variable independiente original x.	Hasta 2

3. (15 puntos) Considere la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \qquad ; U(0,t) = 0,\ U\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}, 1\right) = e^{\frac{2\sqrt{3}-\pi}{2\sqrt{3}}}$$

a) Utilice el método de separación de variables para resolver la ecuación diferencial utilizando una constante de separación igual a -1.

SOLUCIÓN:

Sea $U = X(x)T(t)$, entonces desde la ecuación original se tiene:

$$X''T + X'T' + XT' = 0 \Rightarrow X''T = -T'(X' + X) \Rightarrow \boxed{\frac{X''}{X' + X} = -\frac{T'}{T} = -1}$$

Primera ecuación:

$$X'' = -X' - X \Rightarrow X'' + X' + X = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + r + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(x) = C_1 e^{-\frac{x}{2}} sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 e^{-\frac{x}{2}} cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$$

Segunda ecuación:

$$-\frac{T'}{T} = -1 \Rightarrow T' - T = 0$$

$$\Rightarrow r - 1 = 0 \Rightarrow r = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{T = C_1 e^t}$$

$$\Rightarrow \boxed{U(x,t) = e^{-\frac{1}{2}x+t}\left(C_1 sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)}$$

b) Hallar $U(1,2)$.

SOLUCIÓN:

$$U(0,t) = 0 \Rightarrow C_1 e^t = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

$$U\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}, 1\right) = e^{\frac{2\sqrt{3}-\pi}{2\sqrt{3}}} \Rightarrow C_2 e^{-\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{3}}+1} sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = e^{\frac{2\sqrt{3}-\pi}{2\sqrt{3}}} \Rightarrow \boxed{C_2 = 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{U(x,t) = e^{-\frac{1}{2}x+t} sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$$

Asume la solución como el producto de funciones en términos de las variables independientes, separa las variables y usando la constante dada, determina las 2 ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes.	Hasta 4
Resuelve las 2 ecuaciones y expresa la solución general de la ecuación.	Hasta 6
Determina el valor de las constantes usando las condiciones dadas, expresa la solución particular.	Hasta 3
Halla $U(1,2)$	Hasta 2

4. (15 puntos) Resuelva la siguiente ecuación diferencial utilizando la Transformada de Laplace:

$$ty'' + (1-2t)y' - 2y = 0 \qquad ; y(0) = 1,\ y'(0) = 2$$

SOLUCIÓN:

$$\mathscr{L}[ty''] + \mathscr{L}[(1-2t)y'] - \mathscr{L}[2y] = 0$$

$$-\frac{d}{ds}\mathscr{L}[y''] + \mathscr{L}[y'] + 2\frac{d}{ds}\mathscr{L}[y'] - 2\mathscr{L}[y] = 0$$

$$-2s\mathscr{L}[y] - s^2\mathscr{L}'[y] + 1 + 2s\mathscr{L}'[y] + (s+2)\mathscr{L}[y] - 1 - 2\mathscr{L}[y] = 0$$

$$\mathscr{L}'[y](-s^2 + 2s) + \mathscr{L}[y](-s) = 0$$

$$\frac{\mathscr{L}'[y]}{\mathscr{L}[y]} = -\frac{1}{s-2}$$

$$\int \frac{\mathscr{L}'[y]}{\mathscr{L}[y]}ds = -\int \frac{ds}{s-2}$$

$$ln(\mathscr{L}[s]) = ln(s-2)^{-1} + ln(C)$$

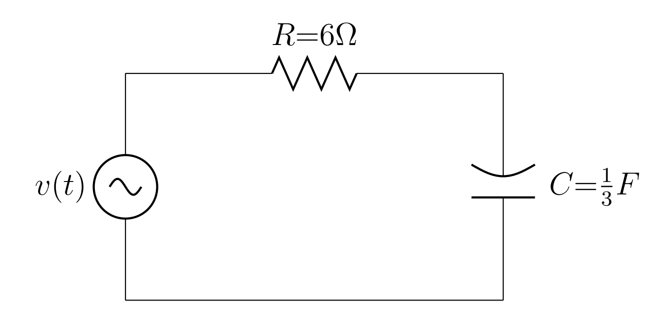
$$\mathscr{L}[s] = \frac{C}{s-2} \Rightarrow y(t) = Ce^{2t}$$

$$y'(0) = 2Ce^0 = 2 \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = e^{2t}}$$

Utiliza la transformada de Laplace y aplica correctamente a cada término el teorema de la derivada de la Transformada y determina la ecuación con variable Y(s) o ecuación subsidiaria.	Hasta 3
Resuelve la ecuación subsidiaria para $Y(s)$.	Hasta 2
Determina la solución general de la ecuación, aplicando correctamente propiedades de la transformada inversa de Laplace en términos de una constante.	Hasta 5
Determina el valor de la constante con la condición $y'(0) = 2$	Hasta 3
Expresa correctamente la solución.	Hasta 2

5. (20 puntos) En el circuito mostrado:



a) Determine la intensidad de la corriente, si $v(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t < \frac{\pi}{2} \\ sen(t) & ; \quad \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \\ 0 & ; \quad t > \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

SOLUCIÓN:

$$6i(t) + 3\int_0^t i(\tau)d\tau = sen(t)\mu(t - \tfrac{\pi}{2}) - sen(t)\mu(t - \tfrac{3\pi}{2})$$

$$6I(s)+\frac{3I(s)}{s}=e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathscr{L}[\underbrace{sen(t+\tfrac{\pi}{2})}_{cos(t)}]-e^{-\frac{3\pi}{2}s}\mathscr{L}[\underbrace{sen(t+\tfrac{3\pi}{2})}_{-cos(t)}]$$

$$6I(s)+\frac{3I(s)}{s}=\frac{se^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}+\frac{se^{-\frac{3\pi}{2}s}}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow I(s)=\frac{s^2}{3(s^2+1)(2s+1)}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)$$

Aplicando fracciones parciales se obtiene:

$$I(s)=\frac{1}{5}\left(\frac{2s-1}{s^2+1}+\frac{1}{2s+1}\right)\left(e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Rightarrow i(t) \;=\; & \frac{\mu(t-\frac{\pi}{2})}{15}\left[2cos(t-\tfrac{\pi}{2})-sen(t-\tfrac{\pi}{2})+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\right]\\ & +\frac{\mu(t-\frac{3\pi}{2})}{15}\left[2cos(t-\tfrac{3\pi}{2})-sen(t-\tfrac{3\pi}{2})+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)}\right]\end{aligned}}$$

b) Calcule la intensidad de la corriente en el tiempo $t=\pi seg$.

SOLUCIÓN:

$$\boxed{i(\pi)=\frac{1}{5}\left[-1+\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right]}$$

Establece correctamente el modelo matemático que define la carga acumulada en el capacitor o bien la intensidad de corriente que atraviesa el circuito.	Hasta 5
Resuelve el modelo establecido para hallar la carga o bien la intensidad de corriente en términos de la función escalón unitario.	Hasta 7
Halla la carga o bien directamente la corriente en los distintos intervalos. Si halla la carga, determina derivando la intensidad de corriente.	Hasta 4
Determina la intensidad de corriente en el tiempo pedido.	Hasta 4

6. (20 puntos) Utilizando series de potencias en x determinar la solución general de la siguiente ecuación diferencial: $4x^2y''-4xy'+(3+4x^2)\,y=0$, identificando las funciones elementales a las cuales convergen las dos soluciones linealmente independientes.

SOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-4x\cdot x}{4x^2}=-1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3+4x^2}{4x^2}\cdot x^2=\frac{3}{4}$$

$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$, $y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}$, $y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$

$$4\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}-4\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r}+3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}+4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+2}=0$$

$$4\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}-4\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r}+3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}+4\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r}=0$$

$[4r(r-1)-4r+3]a_0x^r+[4(r+1)r-4(r+1)+3]a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}[4a_n(n+r)(n+r-1)-4a_n(n+r)+3a_n+4a_{n-2}]x^{n+r}=0$

$\Rightarrow a_0\neq 0$

$\Rightarrow 4r^2-8r+3=0\Rightarrow(4r-6)(4r-2)=0\Rightarrow \boxed{r=\frac{3}{2},\, r=\frac{1}{2}}$

$$a_n=-\frac{4a_{n-2}}{4(n+r)(n+r-2)+3};\qquad n\geq 2$$

Cuando $r=\frac{3}{2}$ se tiene:

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n+1)};\qquad n\geq 2$$

$$a_2=-\frac{a_0}{3!}$$

$a_3=a_5=a_7=\cdots=a_{2n-1}=0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

$$a_4=-\frac{a_2}{4\cdot 5}=\frac{a_0}{5!}$$

$$\Rightarrow y_1(x)=x^{3/2}a_0\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\right)=a_0\frac{x^{3/2}}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}(-1)^n=a_0x^{1/2}sen(x)$$

$\Rightarrow \boxed{y_1(x)=x^{1/2}sen(x)}$

Sin embargo, cuando $r=\frac{1}{2}$ se tiene:

De $[4(r+1)r-4(r+1)+3]a_1$ se tiene que:

$(4(\frac{1}{2}+1)\frac{1}{2}-4(\frac{1}{2}+1)+3)a_1\Rightarrow(0)a_1=0\Rightarrow a_1\in\mathbb{R}$

Por lo tanto,

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n-1)};\qquad n\geq 2$$

$$a_2=-\frac{a_0}{2\cdot 1}=-\frac{a_0}{2!}$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{3 \cdot 2} = -\frac{a_1}{3!}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4!}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = \frac{a_1}{5!}$$

$$y_2(x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow y_2(x) = x^{1/2} \left[a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^5 - \cdots \right]$$

$$\Rightarrow y_2(x) = x^{1/2} \left[a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \right) + a_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \right) \right]$$

$$\Rightarrow y_2(x) = x^{1/2} \left[a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}(-1)^n}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}(-1)^n}{(2n+1)!} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y_2(x) = x^{1/2} \left[a_0 cos(x) + a_1 sen(x) \right]}$$

Demuestra que $X_0 = 0$ es un punto singular regular, expresa la forma de la solución según Frobenius y la deriva 2 veces.	Hasta 3
Reemplaza la solución asumida en la ecuación y luego agrupa términos semejantes y obtiene los índices de singularidad. Determina la fórmula de recurrencia general de las soluciones.	Hasta 4
Con un índice, genera la fórmula recursiva particular, deduce una regla de formación de los coeficientes de la solución en serie de la primera solución en serie y determina a qué función converge.	Hasta 7
Usando Reducción de Orden, la Identidad de Abel, o con el segundo índice de singularidad halla la segunda reconociendo a qué función elemental converge la segunda solución en serie linealmente independiente.	Hasta 6